Begriffsbildung mit Technologie: Grenzwert und Irrationale Zahlen

HELMUT HEUGL

Der Grenzwert von Folgen und Reihen und der Grenzwert reeller Funktionen bilden die Grundlage für die Analysis und sind damit auch Voraussetzung für die Bewältigung von Grundkompetenzaufgaben der neuen Reifeprüfung.

Bei der Erweiterung von Zahlenbereichen ist es wichtig, zu überlegen, wie sich die neuen Objekte aus der bisher bekannten Zahlenmenge entwickeln lassen. Der doch schwierige Schritt zu irrationalen Zahlen kann durch Technologienutzung unterstützt werden.

Durch den Einsatz von Technologie kann ein grundlegendes Verständnis schon in einer experimentellen Lernphase erreicht werden und auch eine Exkatifizierung wird durch die Übernahme komplexer Operationen unterstützt.

1. Ein Blick in den Lehrplan und zu den Grundkompetenzen der Reifeprüfung

Im August 2016 wurde ein neuer Lehrplan (BMB, 2016) veröffentlicht. Er versteht sich als Neuausrichtung des Lehrplans 2004 im Hinblick auf Semestrierung und Kompetenzorientierung. In den Handreichungen findet man auch einen erweiterten Grundkompetenzkatalog, der auch jene Grundkompetenzen enthält, die für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung relevant sind.

Ein paar Ausschnitte, die für dieses Thema relevant sind:

Der Lehrplan:

6. Klasse: 3. Semester – Kompetenzmodul 3

Folgen

- *Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen); sie durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können*
- *Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert)*

6. Klasse: 4. Semester – Kompetenzmodul 4

Reihen

- *Summen endlicher arithmetischer und geometrischer Reihen berechnen können*
- *Summen unendlicher Reihen definieren und für konvergente geometrische Reihen berechnen können*

7. Klasse: 5. Semester – Kompetenzmodul 5 und 6

Grundlagen der Differentialrechnung

- *Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können*
- *Den Differenzen- und Differentialquotienten als Sekanten- bzw. Tangentensteigung sowie in außermathematischen Bereichen deuten können*

Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung

- *Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können*
- *Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen*

Kommentar:

Der Begriff „Grenzwert“ kommt zwar im Lehrplan an verschiedenen Stellen vor, welche Art von Grenzwertdefinition das Ziel des Lernprozesses ist, wird nicht näher erläutert. Beim Kapitel „Folgen“ findet man als Kommentar:

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 49, 2016, S. 45 - 59

„Den Grenzwertbegriff intuitiv erfassen und allenfalls definieren können". Beim Kapitel „Reihen" heißt es: *„Den Begriff der Summe einer unendlichen Reihe definieren können."*

Noch weniger deutlich werden die Kompetenzen in der Analysis beschrieben. Der Kommentar lautet: *„Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient (lokale bzw. momentane Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und kontextbezogen (verbal sowie in formaler Schreibweise) anwenden können."* Was mit einem „intuitiven Grenzwertbegriff gemeint ist, wird nicht näher erläutert. Der Unterschied zwischen dem Grenzwert von Folgen und dem Grenzwert reeller Funktionen, den man ja in der Analysis braucht, wird nicht erwähnt. Welche Exaktheit Ziel des Lernprozesses ist, muss von den Lehrenden entschieden werden.

Der Grundkompetenzkatalog der Reifeprüfung:

Folgen und Reihen kommen in diesem Grundkompetenzkatalog nicht vor. Damit wird auch darauf verzichtet, Grundbegriffe der Analysis durch einen Grenzwertbegriff vorzubereiten. In der Analysis wird allerdings dann sehr wohl auf die Notwendigkeit eines „intuitiven" Grenzwertbegriffs hingewiesen:

AN-R 1.2	*Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können*

Ähnliche Formulierungen findet man im Grandkompetenzkatalog der berufsbildenden höheren Schulen (BHS):

4.1	*Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses argumentieren.*

Die Rolle der Technologie

Gerade da kann die Technologie eine große Hilfe sein, weil in einer experimentellen Lernphase durch Visualisierung und durch das Nutzen von Tabellen ein intuitiver Grenzwertbegriff erworben werden kann. Durch die Übernahme komplexer Grenzwertberechnungen durch das Werkzeug kann auch in einer exaktifizierenden Phase die Existenz von Grenzwerten gezeigt werden.

2. Entwicklung des Grenzwertbegriffs

Abb. 1

Die Entwicklung des Grenzwertbegriffs beginnt schon in der Sekundarstufe 1. Bereits in der 1. und 2. Klasse (5. Und 6. Schulstufe) wird dieser Begriff bei Reflexionen über den Inhaltsbegriff und beim Arbeiten mit periodischen Dezimalzahlen vorbreitet.

In der 4. Klasse kann bei den irrationalen Zahlen das technologische Werkzeug eine Hilfe beim Erarbeiten eines intuitiven Grenzwertbegriffs sein.

Der eigentliche Begriffsbildungsprozess findet dann in der Sekundarstufe 2 statt.

Aufgabe 2.1: Ermittlung von Flächeninhalten unregelmäßiger Figuren

Hier nutzt man die fundamentale Idee des Messens, nämlich zu schauen, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist (Abb. 3). Verschiedene Schülergruppen werden verschiedene Näherungswerte erhalten. Über die Verfeinerung sollte reflektiert werden, als Hausübung ist Abb. 4 nicht empfehlenswert.

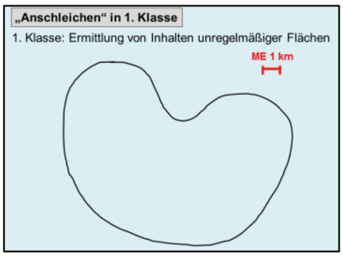


Abb. 2

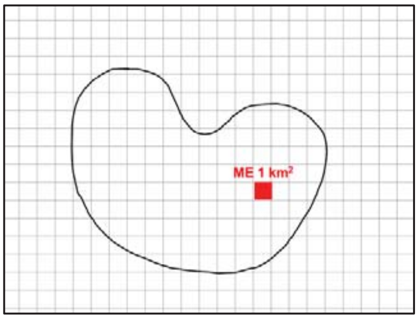


Abb. 3

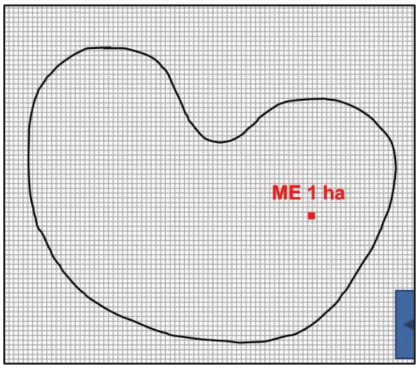


Abb. 4

3. Grenzwert von Zahlenfolgen

Nutzt man technologische Werkzeuge, so ergeben sich im Lernprozess häufig zwei Phasen:

- die experimentelle Phase, die zu Vermutungen führt, und
- die exaktifizierende Phase, in der man die Vermutungen absichert

3.1 Die experimentelle Phase

Als Werkzeuge verwendet man entweder ein Tabellen- oder ein Graphikwerkzeug.

Ziele:

- Vermutungen bezüglich der Eigenschaften der Folgen (Monotonie, Schranken, Konvergenz)
- Intuitiver Grenzwertbegriff durch Experimentieren mit dem Tabellenwerkzeug und dem Graphikwerkzeug

Aufgabe 3.1: Gegeben ist die Folge $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$

Entwickle 3 Wertetabellen. Runde in der ersten auf 2 Dezimalstellen, dann auf 3 und schließlich auf 5 Dezimalstellen.

- Gib eine untere Schranke an.
- Welche Vermutung bezüglich Monotonie hast du?
- Welcher Zahl kommen die Glieder der Folge für große n beliebig nahe?

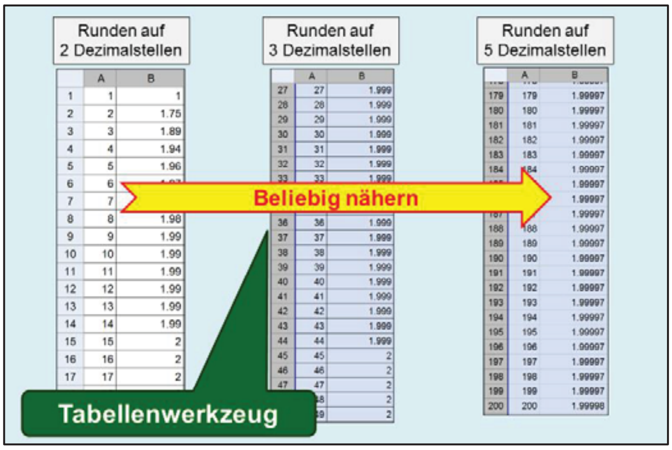


Abb. 5

Ein Verständnis für den im Lehrplan angesprochenen „intuitiven" Grenzwert wird durch solche Aufgaben unterstützt. Die größer werdende Genauigkeit stärkt die Vermutung, dass sich die Folge dem Wert 2 „beliebig" nähert.

Aufgabe 3.2: Gegeben ist die Folge $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$

Zeichne den Graphen der Zahlenfolge im Intervall [0, 30] und finde eine Vermutung für den Grenzwert.

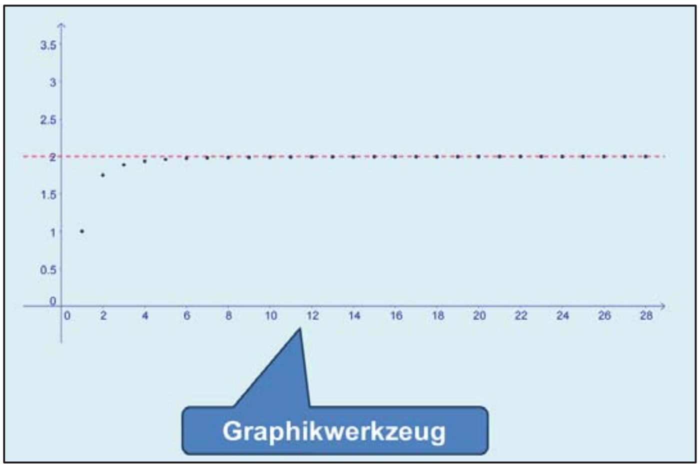


Abb. 6

3.2 Die exaktifizierende Phase

Ziele:

- Beweisen von Monotonie und Schranken. Das Operieren übernimmt das CAS Werkzeug.
- Entwickeln einer exakteren Grenzwertdefinition. Nutzung von fertigen Applets zur Begriffsentwicklung.
- Konvergenzbeweise mit der exakten Grenzwertdefinition. Das Operieren übernimmt das CAS Werkzeug.

Aufgabe 3.3: Gegeben ist die Folge $u1(n) = \frac{-1+2n}{1+n}$

Untersuche die Folge bezüglich Monotonie und Schranken.

Die Untersuchung beginnt wieder mit einer experimentellen Phase, um zu Vermutungen zu kommen. Genutzt werden der Graph und die Wertetabelle.

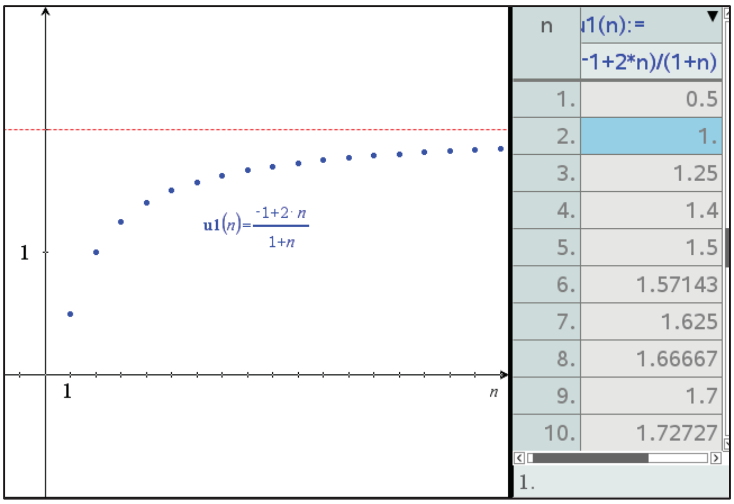


Abb. 7

Behauptung:

- 0 ist untere und 2 ist obere Schranke
- u1(n) ist streng monoton steigend

Beweise:
Das Operieren, das heißt das Lösen der Ungleichungen wird auf das Werkzeug ausgelagert. Die Tätigkeit verschiebt sich vom Ausführen zum Planen.

Schranken:

$u1(n):=\frac{-1+2\cdot n}{1+n}$	*Done*
$\text{solve}\left(\frac{-1+2\cdot n}{1+n}\geq 0,n\right)\vert n\geq 0$	$n\geq\frac{1}{2}$
$\text{solve}\left(\frac{-1+2\cdot n}{1+n}\leq 2,n\right)\vert n\geq 0$	$n\geq 0$

Abb. 8

Die Behauptungen sind richtig für alle $n\in\mathbb{N}^*$

Monotonie:

$\text{solve}(u1(n)<u1(n+1),n)\vert n\geq 0$	$n\geq 0$

Abb. 9

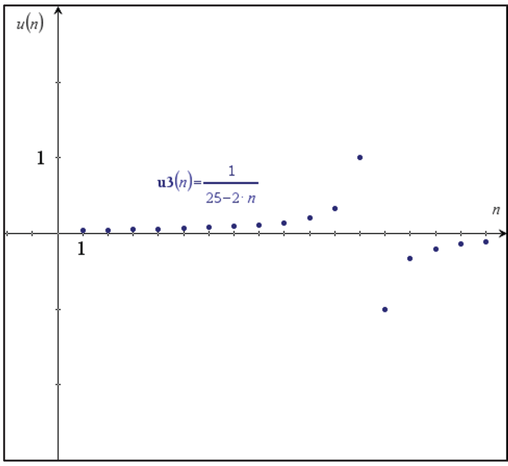
Die Behauptungen sind richtig für alle $n\in\mathbb{N}^*$

Kommentar: Die Lernenden arbeiten nicht mit den komplexen Termen, sondern mit den Funktionsnamen.

Aufgabe 3.4: Gegeben ist die Folge $u3(n)=\frac{1}{25-2n}$

Untersuche die Folge bezüglich Monotonie und Schranken.

Zuerst werden wieder der Graph und die Tabelle untersucht:



n	u3(n):= 1/(25−2*n
7.	0.090909
8.	0.111111
9.	0.142857
10.	0.2
11.	0.333333
12.	1.
13.	-1.
14.	-0.3333...
15.	-0.2

$=u3(n):=\frac{1}{25-2\cdot n}$

Abb. 10

Eine mögliche Vermutung bei Untersuchung des Graphen könnte sein:

- Die Folge ist streng monoton steigend
- -1 ist untere und +1 ist obere Schranke

Beweis mit Hilfe von CAS:

$\text{solve}(u3(n+1)>u3(n),n)$	$n<\frac{23}{2}$ or $n>\frac{25}{2}$

Abb. 11

Die Behauptung ist nicht richtig für n=12. Daher ist die Folge nicht streng monoton steigend.

$\text{solve}(u3(n)\leq 1,n)\vert n\geq 0$	$0\leq n\leq 12$ or $n>\frac{25}{2}$
$\text{solve}(u3(n)\geq -1,n)\vert n\geq 0$	$0\leq n<\frac{25}{2}$ or $n\geq 13$

Abb. 12

Die Behauptungen sind richtig für alle $n\in\mathbb{N}^*$

Es kommt zu einer Schwerpunktverschiebung vom Operieren zum Interpretieren und Argumentieren.

3.3 Entwickeln einer exakteren Grenzwertdefinition, Beweise mit dieser Definition

Definition:

Eine Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge $(a_n | n \in \mathbb{N}^*)$, wenn es zu jeder (noch so kleinen) positiven reellen Zahl ε einen Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Das heißt, in jeder noch so kleinen ε - Umgebung liegen fast alle Glieder der Folge, außerhalb nur endlich viele.

Die Begriffsentwicklung wird unterstützt durch Experimentieren mit einem fertigen Applet:

Aufgabe 3.5: Gegeben ist die Folge $u1(n) = 1 + \dfrac{1}{n}$

Nutze die fertigen Applets zum Experimentieren:
Verändere mit Hilfe des eingebauten Schiebereglers die ε-Umgebungen im Graphikfenster und suche zu verschiedenen ε-Umgebungen den passenden Index n_0, so dass entsprechend der Grenzwertdefinition gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

Quelle: http://www.t3oesterreich.at/index.php?id=227

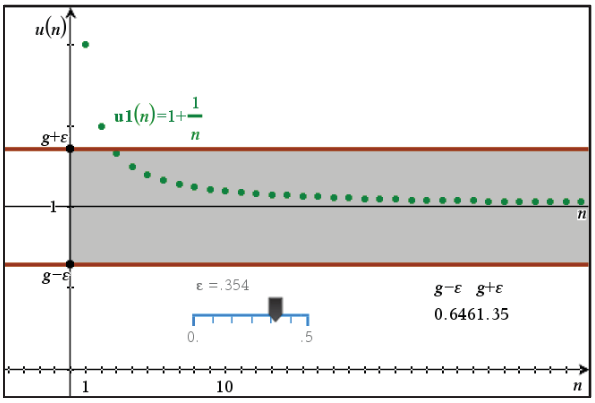


Abb. 13

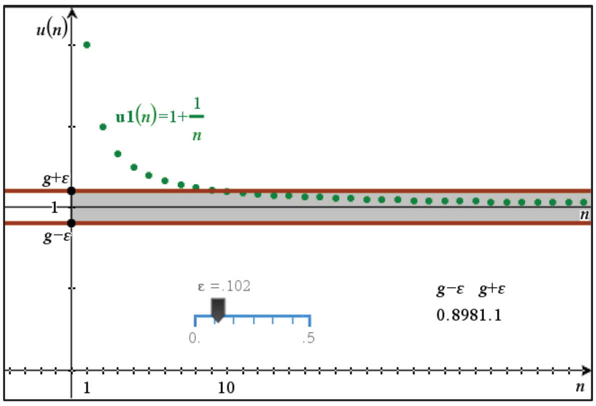


Abb. 14

Aufgabe 3.6: Gegeben ist die Folge $u2(n) = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

Zeichne den Graphen der Folge und beweise mit Hilfe der Grenzwertdefinition, dass es sich um Nullfolgen handelt.

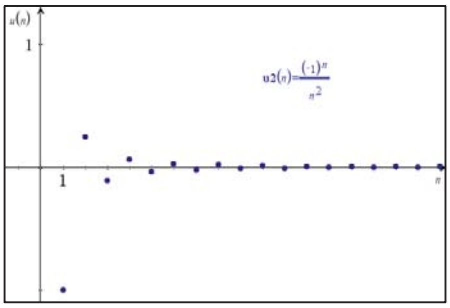


Abb. 15

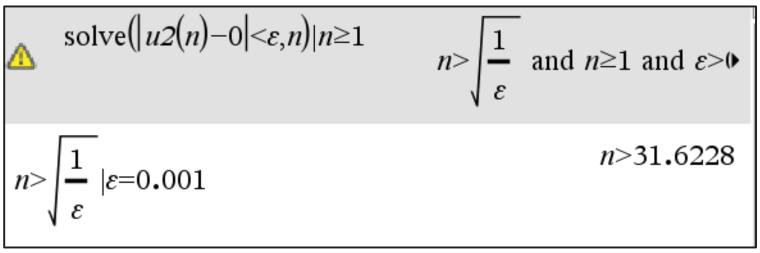


Abb. 16

Die Lösung der Ungleichung zeigt: Es gibt für (noch so kleine) ε einen Index n_0.

Man könnte als Beispiel n_0 für ein bestimmtes ε suchen

Aufgabe 3.7: Gegeben ist die Folge $u2(n)=\sqrt{(n+1)}$

Zeichne den Graphen der Folge. Könnte es einen Grenzwert geben? Wenn ja, beweise seine Existenz mit Hilfe der Grenzwertdefinition.

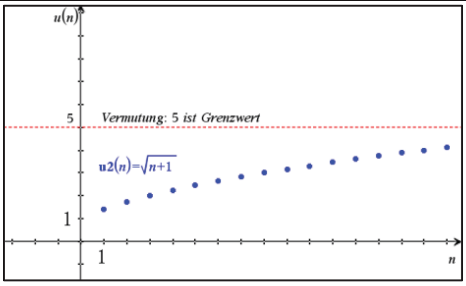


Abb. 17

Eine mögliche Vermutung könnte sein: 5 ist Grenzwert.

$\text{solve}(|u2(n)-5|<\varepsilon,n)|n\geq 1 \text{ and } \varepsilon>0$

$n>\varepsilon^2-10\cdot\varepsilon+24 \text{ and } 1\leq n<24 \text{ and } 0<\varepsilon\leq 5 \text{ or } 1\leq n<24 \text{ and } \varepsilon>5 \text{ or}$ ▸

$\text{solve}(|u2(n)-5|<0.1,n)$ $\quad 23.01<n<25.01$

Abb. 18

Die Lösung des CAS-Werkzeuges ist sehr schwer zu interpretieren, aber um zu beweisen, dass die Behauptung nicht gilt, genügt es, ein ganz bestimmtes ε zu untersuchen. Es zeigt sich: Für ε = 0.1 gibt es einen solchen Index n_0 nicht.

Didaktischer Kommentar

Natürlich wäre es wünschenswert, in der exaktifizierenden Phase die auftretenden Ungleichungen auch ohne Technologie algebraisch zu lösen. Da aber das Kapitel „Folgen und ihre Grenzwerte" nicht in der Grundkompetenzliste der Reifeprüfung enthalten ist, und auch im Lehrplan nur von einem „intuitiven Grenzwert" die Rede ist, wird für dieses Kapitel (wenn überhaupt) wenig Zeit verwendet werden. Die Übernahme des Operierens durch Technologie erlaubt wenigstens ein Reflektieren über Lösungen und trägt damit wesentlich zum Begriffsbildungsprozess bei.

4. Differenzenquotient/ Differentialquotient

Für die Begriffsentwicklung und als Grundlage der Differentialrechnung ist das Herstellen einer Beziehung zwischen diesen beiden Begriffen ein wichtiger Schritt im Lernprozess. Das Lernziel ist im Katalog der Grundkompetenzen der Reifeprüfung formuliert /siehe Kapitel 1):

Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

Auch hier ist von einem nicht näher definierten „intuitiven" Grenzwertbegriff die Rede. Technologie unterstützt die Entwicklung dieses „intuitiven" Grenzwertbegriffs in einer experimentellen Phase und ermöglicht auch eine Exaktifizierung, da komplexe Operationen vom CAS-Werkzeug übernommen werden können.

4.1 Die experimentelle Phase

Aufgabe 4.1: Experimentieren mit Sekantensteigung/Tangentensteigung
Quelle: http://www.t3oesterreich.at/index.php?id=227

Durch zwei Punkte A und B auf dem Graphen der Funktion f wird eine Sekante gelegt. Nutze den Schieberegler zur experimentellen Untersuchung der folgenden Fragen:

- Wie verändert sich die Steigung der Sekante, wenn der Punkt B gegen den Punkt A wandert?
- Was passiert, wenn der Punkt B den Punkt A erreicht?
- Was ist der Unterschied zwischen den beiden Applets?

Didaktischer Kommentar:

Es werden zwei scheinbar gleiche, aber didaktisch sehr verschiedene Applets eingesetzt:

- Das erste Applet wird verwendet, bevor man den Grenzwertbegriff entwickelt hat. Erreicht der Punkkt B den Punkt A, ist das Ergebnis *„nicht definiert"*.

- Beim zweiten Applet ist das Ergebnis der "beliebigen" Näherung der Grenzwert des Differenzenquotienten - der Differentialquotient

Applet 1:

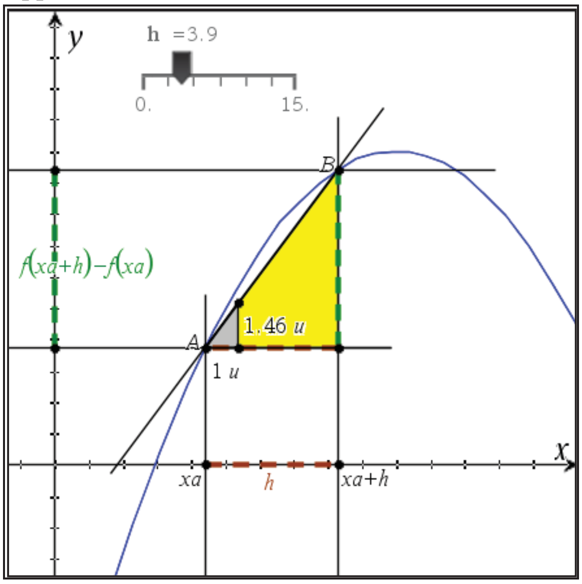


Abb. 19

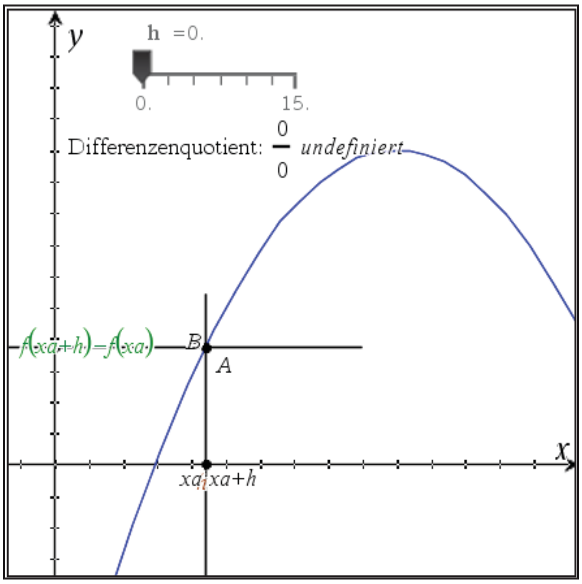


Abb. 20

Wenn der Punkt B den Punkt A erreicht ($h \to 0$), ist der Differenzenquotient nicht definiert

Applet 2:

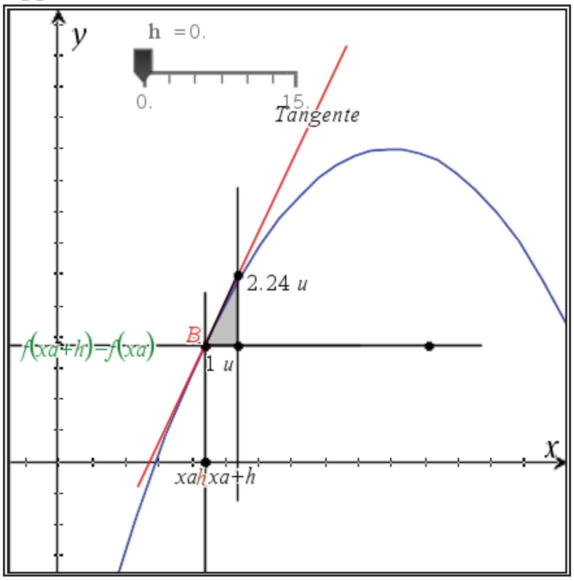


Abb. 21

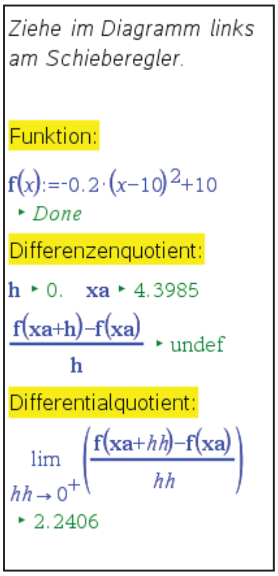


Abb. 22

Im Notesfenster kann man die Entwicklung der Folge der Differenzenquotienten beobachten.

Beim Applet 2 wird auch der Differentialquotient berechnet.

Wenn der Punkt B den Punkt A erreicht ($h \to 0$), erscheint eine neue Gerade, die den Grenzwert des Differenzenquotienten als Steigung hat – die Tangente.

4.2 Die exaktifizierende Phase

Eine Kompetenzerwartung des Lehrplankapitels „*Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung*" lautet:

– *Den Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen*

Didaktischer Kommentar:

Basierend auf einem so genannten "intuitiven" Grenzwertbegriff ist es nicht leicht, dieses Lehrplanziel zu erfüllen. Wenn überhaupt, sollte doch der Unterschied zwischen dem Grenzwert von Zahlenfolgen und dem Grenzwert reeller Funktionen angesprochen werden. Die „ε, δ - Definition" ist bei den wenigen Mathematikstunden, die wir in Österreich haben, schwer zu vermitteln und auch nur dann sinnvoll, wenn Konvergenzuntersuchungen basierend auf dieser Definition durchgeführt werden.

Man könnte aber mit Hilfe von Technologie, basierend auf dem Grenzwert von Zahlenfolgen mit der folgenden Definition sehr wohl eine Grenzwertidee für reelle Funktionen nutzen, um das Thema „Stetigkeit/Differenzierbarkeit" zu behandeln.

Definition: Grenzwert reeller Funktionen mit Hilfe von Nullfolgen

Sei f eine in einer Umgebung von x_0 (eventuell mit Ausnahme von x_0 selbst) definierte Funktion. Die Zahl g heißt **Grenzwert von f an der Stelle x_0** ($\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)\right)$), wenn für jede beliebige Nullfolge h gilt:

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)) = \lim_{h\to 0}(f(x_0-h)) = g$$

Definition: Stetigkeit reeller Funktionen mit Hilfe von Nullfolgen

Eine reelle Funktion f heißt stetig an der Stelle x_0, wenn

- f an der Stelle x_0 definiert ist,
- der Grenzwert von f an der Stelle x_0 existiert und
- dieser Grenzwert mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)\right) = \lim_{h\to 0}\left(f(x_0-h)\right) = f(x_0)$$

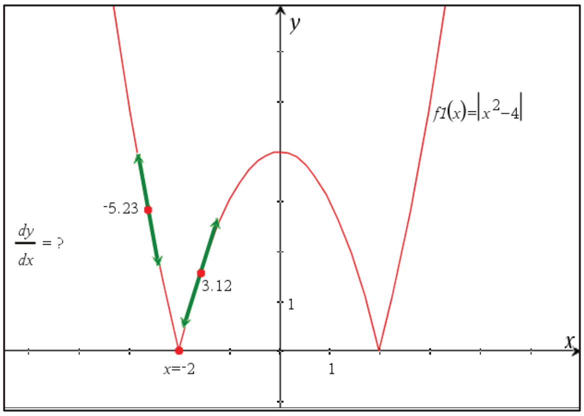
Wenn man die Grenzwertberechnungen auf das CAS-Werkzeug auslagert, kann man sowohl Untersuchungen zur Stetigkeit als auch zur Differenzierbarkeit reeller Funktionen durchführen. Der erste Schritt ist aber eine experimentelle Untersuchung im Graphikfenster.

Aufgabe 4.2: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Gegeben ist die reelle Funktion g mit $g(x) = \left|x^2 - 4\right|$.

Untersuche die Funktion g an der Stelle x = -2 bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster



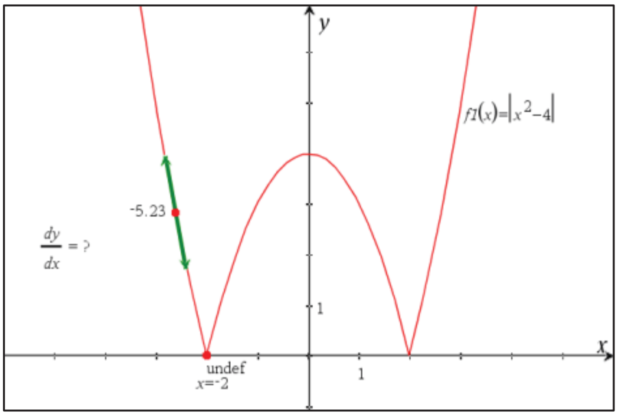


Abb. 23 Abb. 24

Zieht man den roten Kurvenpunkt (von rechts) gegen x = -2, so verschwindet die Tangente an der Stelle x = -2 (nicht aber der Punkt) und die Meldung lautet „undefiniert“. Bei weiterer Bewegung nach links erscheint die Tangente wieder mit negativer Steigung.

Schritt 2: Grenzwertberechnungen mit Hilfe von CAS

$g(x):=\lvert x^2-4\rvert$	*Done*
$\lim\limits_{h\to 0}(g(-2+h))\lvert h\geq 0$	0
$\lim\limits_{h\to 0}(g(-2+h))\lvert h\leq 0$	0
$g(-2)$	0

Abb. 25

Das CAS-Werkzeug ermöglicht die Berechnung des links- und rechtsseitigen Grenzwerts.

Die Grenzwerte stimmen mit dem Funktionswert überein.

Folgerung: Die Funktion **g ist stetig an der Stelle x = -2**

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}\right)$	undef
$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}\right)\lvert h\geq 0$	4
$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(-2+h)-g(-2)}{h}\right)\lvert h\leq 0$	-4

Abb. 26

Ermittelt man den Grenzwert des Differenzenquotienten für beliebige Nullfolgen h, so ist das Ergebnis: „undefiniert an der Stelle -2“.

Berechnet man allerdings nur den rechtsseitigen Grenzwert, so erhält man den Wert +4, bei Berechnung des linksseitigen Grenzwerts erhält man den Wert -4.

Folgerung: Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht, daher ist die Funktion **g an der Stelle x =** -2 **nicht differenzierbar.**

$g1(x):=\frac{d}{dx}(g(x))$	*Fertig*
$g1(x)$	$2\cdot x\cdot \operatorname{sign}(x^2-4)$
$g1(-2)$	± 4

Abb. 27

Man könnte den Differentialquotienten mit dem CAS-Werkzeug als Black Box auch direkt berechnen und erhält dasselbe Ergebnis.

5. Rekursive Verfahren zur Approximation reeller Zahlen

Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ finden sich natürlich in allen Lehrplänen. Aber es genügt nicht, in diesen Zahlenmengen zu operieren. Wichtig wäre, die Erweiterung der Zahlenbereiche bewusst zu machen, also zu erleben, warum und wie eine neue Zahlenmenge entsteht.

Eine gute Deutung der irrationalen Zahlen, die auch die Idee der Erweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ mit einbezieht, ist folgende:

> *Der Schritt zur irrationalen Zahl besteht darin, dass man die Möglichkeit, sich dieser Zahl beliebig zu nähern, zur Zahl erklärt.*
>
> Roland Fischer

Technologie bietet für die Schülerinnen und Schüler durch Nutzen rekursiver Verfahren interessante Möglichkeiten, die Idee dieser Definition auch zu erleben.

In diesem Vortrag sollen zwei rekursive Verfahren zur Approximation von $\sqrt[k]{a}$ bezüglich ihrer Konvergenz untersucht werden. Die Quelle ist ein „Mathe Brief (Nr. 33)" der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (OEMG), der Autor ist Prof. Fritz Schweiger. Es wird die Konvergenz der folgenden Verfahren „klassisch" untersucht (Monotonie, Beschränktheit) (Schweiger, F., 2013):

Verfahren 1: $x_n = \frac{1}{2}\cdot\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{\ k-1}}\right)$

Verfahren 2: $x_n = \frac{1}{k}\cdot\left((k-1)\cdot x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{\ k-1}}\right)$

Wir wollen die Konvergenz mit Hilfe der Technologie in zwei Schritten untersuchen.

Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster, finden einer Vermutung.

Schritt 2: Nutzen des Fixpunktsatzes, Beweis mit Hilfe von CAS.

Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster, finden einer Vermutung

Technologie bietet in der Regel zwei Darstellungsmöglichkeiten an:

- „Time–Modus": $x_n = f(n)$
- „Web-Modus": $x_n = g(x_{n-1})$

Der im „Web-Modus" entstehende Streckenzug visualisiert sehr gut die zwei Phasen der rekursiven Denktechnologie – Auswerten und Rückkoppeln.

In der experimentellen Phase können wir natürlich nur konkrete Beispiele behandeln. Wir untersuchen die Konvergenz für $\sqrt[k]{7}$ mit k = 3,4,5.

Untersuchung von Verfahren1

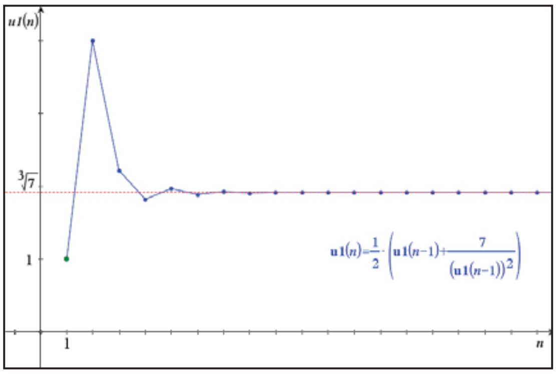


Abb. 28

Untersuchung im „Time-Modus":

Für k = 3 ist die Konvergenz offensichtlich.

Für k = 4 kann man für n von 1 bis 20 noch keine gesicherten Schlüsse ziehen. Man kann aber den Graphen auch im Intervall [1500; 1520] untersuchen. Die noch immer auftretende Oszillation lässt eine gesicherte Vermutung bezüglich der Konvergenz nicht zu.

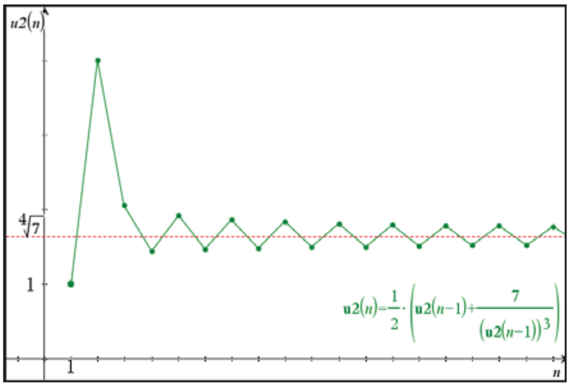


Abb. 29

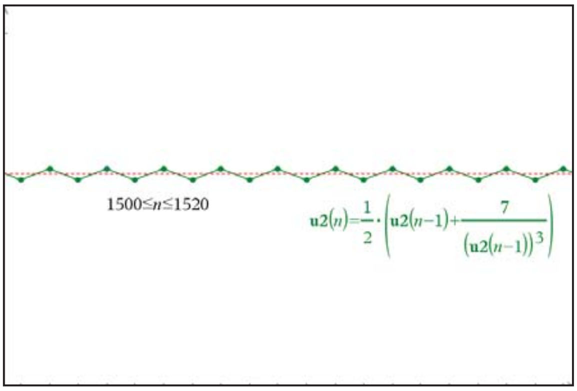


Abb. 30

Bessere Informationen liefert die Darstellung im „Web-Modus“

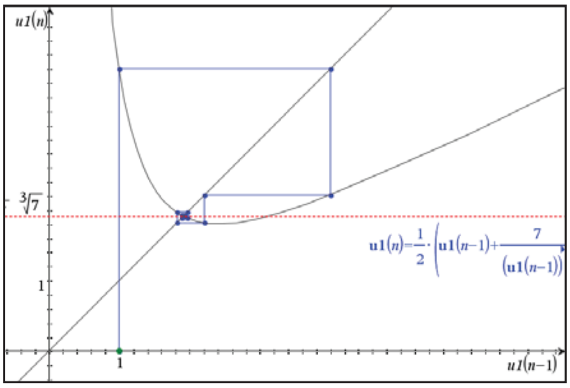


Abb. 31

Untersuchung im „Web-Modus“:

Für k = 3 lässt sich Konvergenz vermuten.

Für k = 4 zeigt sich ein ähnliches Bild. Vergrößert man allerdings den Bereich um einen möglichen Grenzwert durch „Zoomen“, wird die Konvergenz unwahrscheinlich.

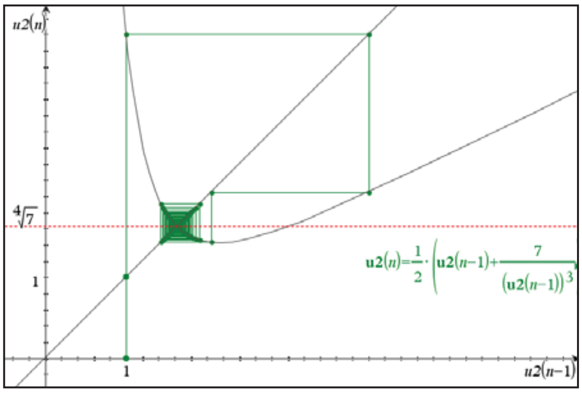


Abb. 32

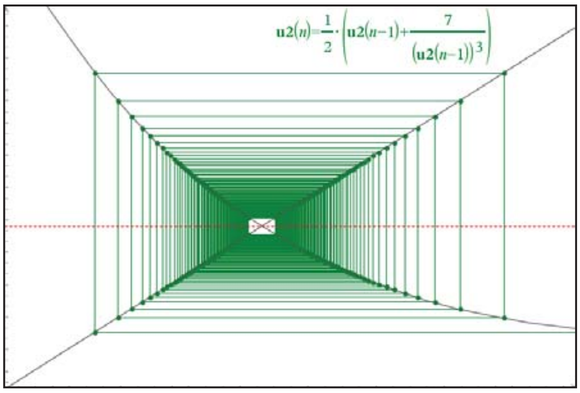


Abb. 33

Untersuchung von Verfahren 2

Sowohl für k = 3 als auch für k = 5 lässt sich Konvergenz vermuten

k = 3 „Time-Modus“

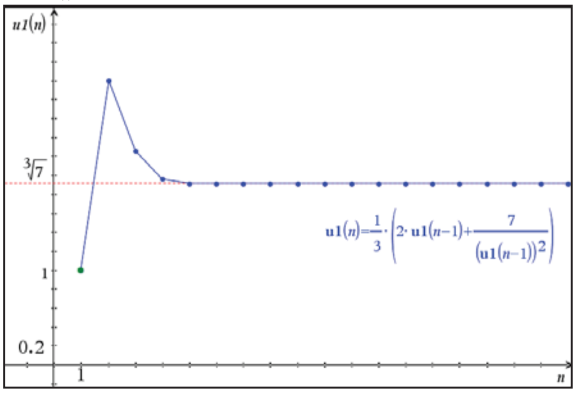


Abb. 34

k= 3 „Web-Modus“

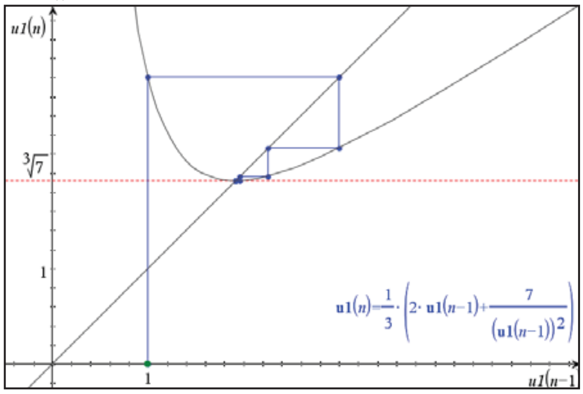


Abb. 35

k = 5 „Time-Modus“

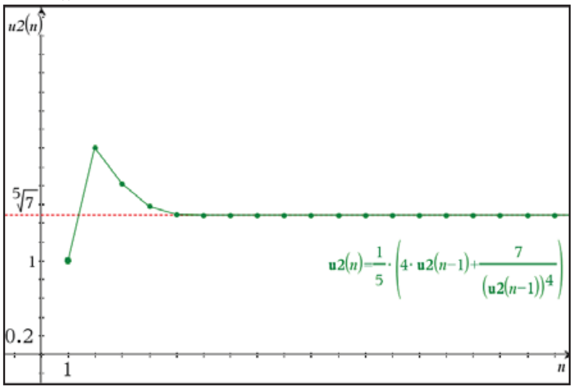


Abb. 36

k= 5 „Web-Modus“

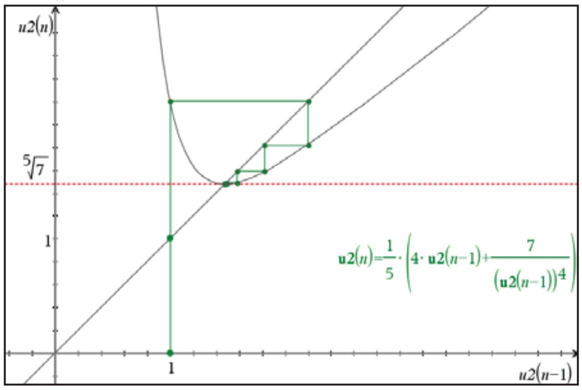


Abb. 37

Ergebnis der experimentellen Phase ist die Vermutung, dass Verfahren 1 nur für k = 3, nicht aber für k = 4,5 konvergiert, und dass Verfahren 2 für k = 3,4,5 konvergiert.

Didaktischer Kommentar:

Diese Aufgabe zeigt sehr schön die Möglichkeiten der Technologienutzung in der experimentellen Phase, ja man kann sagen, so eine experimentelle Phase wird durch Technologie überhaupt erst möglich. Gefährlich wäre es, sich mit dieser Phase der anschaulichen Vermutungen zu begnügen. Dann würden wesentlicher Aspekte mathematischer Denktechnologie fehlen. Die experimentelle Phase ist eine wirksame Vorbereitung, aber kein Ersatz der exaktifizierenden Phase.

Schritt 2: Nutzen des Fixpunktsatzes, exakter Beweis der Konvergenz

Ein paar theoretische Voraussetzungen

☞ Ist $f: X \to X$ eine Funktion und $x_0 \in X$, so nennt man die durch $x_{n+1} := f(x_n)$ rekursiv definierte Folge **Iterationsfolge von f** mit Startwert x_0.

☞ Ein Punkt x* heißt **Fixpunkt** einer Funktion f, wenn $f(x^*) = x^*$, wenn also x* auf sich selbst abgebildet wird.

☞ Ein Fixpunkt x* heißt **anziehend**, wenn es eine Umgebung U von x* gibt, so dass jede Iterationsfolge von f mit einem Startwert x_0 in U (mit $x_0 \neq x^*$) gegen x* konvergiert. Ein Fixpunkt heißt **abstoßend**, wenn keine derartige Iterationsfolge gegen x* konvergiert.

☞ **Fixpunktsatz:** Es sei eine Funktion f im Fixpunkt x* differenzierbar. Dann ist der Fixpunkt x* **anziehend** für $|f'(x^*)|<1$ und **abstoßend** für $|f'(x^*)|>1$ (Im Fall $|f'(x^*)|=1$ kann keine allgemeingültige Aussage gemacht warden.)

Als ersten Schritt können wir nun im Graphikfenster die Steigung der Tangente an die Funktion $u_n = f(u_{n-1})$ im Fixpunkt u* ermitteln:

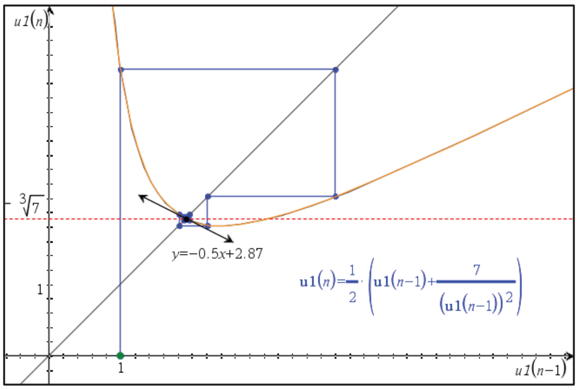


Abb. 38

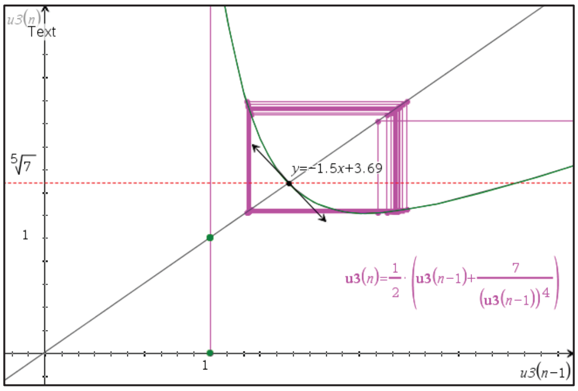


Abb. 39

Ergebnis für das Verfahren 1:

- ☞ Für die 3. Wurzel ist die Steigung -0.5 ⇒ nach dem Fixpunktsatz ergibt sich Konvergenz
- ☞ Für die 5. Wurzel ist die Steigung -1.5 ⇒ nach dem Fixpunktsatz ergibt sich Divergenz

Im zweiten Schritt kann man die Konvergenzuntersuchungen allgemein für $\sqrt[k]{a}$ durchführen. Wir übersiedeln in das CAS-Fenster:

Verfahren 1:

$f(x):=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{a}{x^{k-1}}\right)$	*Fertig*	
$\text{solve}\left(x=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{a}{x^{k-1}}\right),x\right)$	$x=a^{\frac{1}{k}}$ and $a>0$	Berechnung des Fixpunktes als Lösung der Gleichung x*=f(x*)
$f1(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*	1. Ableitung
$f1(x)$	$\frac{(x^k-a\cdot(k-1))\cdot x^{-k}}{2}$	
$f1\left(a^{\frac{1}{k}}\right)$	$\frac{\left(\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k-a\cdot(k-1)\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{-k}}{2}$	1. Ableitung an der Fixpunktstelle
$f1\left(a^{\frac{1}{k}}\right)\vert a>0$	$\frac{-(k-2)}{2}$	Erst für a>0 erhält man einen brauchbaren Wert
$\text{solve}\left(\left\vert\frac{-(k-2)}{2}\right\vert<1,k\right)$	$0<k<4$	Die Betragsungleichung wird vom CAS gelöst

Abb. 40

Ergebnis: Der Betrag der 1. Ableitung an der Stelle des Fixpunktes ist kleiner 1 für k = 1,2,3. Daher konvergiert die Lösungsfolge des rekursiven Verfahrens 1 nur für k = 2 und k = 3. Für k = 4,5,… ist die Folge nicht konvergent.

Verfahren 2:

$g(x):=\frac{1}{k}\cdot\left((k-1)\cdot x+\frac{a}{x^{k-1}}\right)$	*Fertig*	
$\text{solve}\left(x=\frac{1}{k}\cdot\left((k-1)\cdot x+\frac{a}{x^{k-1}}\right),x\right)$	$x=a^{\frac{1}{k}}$ and $a>0$ and $k\neq 0$	Berechnung des Fixpunktes als Lösung der Gleichung x*=f(x*)
$g1(x):=\frac{d}{dx}(g(x))$	*Fertig*	1. Ableitung
$g1(x)$	$\frac{(k-1)\cdot(x^k-a)\cdot x^{-k}}{k}$	
$g1\left(a^{\frac{1}{k}}\right)$	$\frac{\left(\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k-a\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{-k}\cdot(k-1)}{k}$	1. Ableitung an der Fixpunkt-stelle
$g1\left(a^{\frac{1}{k}}\right)\vert a>0$	0	Erst für a>0 erhält man den Wert 0

Abb. 41

Ergebnis: Die Steigung der 1. Ableitung im Fixpunkt ist 0 für a > 0 und k ≠ 0. Daher ist die Lösungsfolge des rekursiven Verfahrens 2 konvergent für alle $k\in\mathbb{N}$.

Eine schöne Aufgabe wäre noch zu zeigen, dass dieses rekursive Verfahren 2 ein Ergebnis des Newtonschen Näherungsverfahrens ist.

Zusammenfassung:

Ich habe dieses Thema auch deshalb gewählt, weil durch den „Grundkompetenzdruck" der neuen Reifeprüfung in Österreich die Gefahr besteht, dass solche unverzichtbaren Inhalte aus dem Unterricht verschwinden. Auch der unscharfe Begriff „intuitiver Grenzwert" trägt nicht zu einer mathematisch sauberen Behandlung dieses Lehrplaninhalts bei. Ohne die Idee des Grenzwerts entzieht man aber der Analysis ihre fundamentale Idee.

Die Nutzung technologischer Werkzeuge inklusive CAS bietet die Chance, einerseits die Begriffsentwicklung zu unterstützen und in einer exaktifizierenden Phase Vermutungen auch zu beweisen oder zumindest für konkrete Werte zu verifizieren.

Literatur

Aumayr, G., Heugl, H., 2015: T3 (Teachers Teaching with Technology) Österreich: Materialien für den Unterricht http://www.t3oesterreich.at/index.php?id=227

BMB (Bundesministerium für Bildung), 2016: Lehrpläne der AHS Oberstufe, aktuelle Fassung vom 14. August 2016 https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Dorninger, D., Karigl, G., 1988: „Mathematik für Wirtschaftsinformatiker" Band II, S. 7. Springer-Verlag Wien New York. ISBN 3-211-82107-4

Heugl, H., 2014: „Mathematikunterricht mit Technologie – ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl von Aufgaben". Veritas-Verlag, Linz. ISBN 978-3-7101-0431-2

Heugl, H., 2015: „Iterationsverfahren zur Approximation irrationaler Zahlen". TI-Unterrichtsmaterialien für Mathematik und Naturwissenschaften. http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/

Schweiger, F., 2013: „Babylonisches Wurzelziehen". Mathe-Brief Nr. 33 der ÖMG (Österreichische Mathematische Gesellschaft) http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief33.pdf